UNIVERZITET U BEOGRADU – ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET
KATEDRA ZA ELEKTRONIKU

# DIGITALNA ELEKTRONIKA 1

*Materijali za računske vežbe*

## BROJNI SISTEMI I PREDSTAVE BROJEVA

## Vežbe 3

**Pripremio:**
**Haris Turkmanović ( haris@etf.bg.ac.rs )**

**Beograd 2022**

# Sadržaj

# 1. Uvod

Konverzije brojeva iz jednih u druge brojne sisteme, kao i različite interpretacije označenih brojeva, predstavljaju dve teme koje će biti obrađene u okviru trećeg dela računskih vežbi iz predmeta Digitalna elektronika 1.

## 1.1. Konverzije brojnih sistema

Broj D prikazan sa *n* cifara u osnovi *r* zapisujemo na sledeći način:

$$D_r$$

gde su $d_{n-1}d_{n-2} \dots d_1 d_0 . d_{-1}d_{-2} \dots d_{-k+1}d_{-k}$ cifre broja D u osnovi *r*. $D_{n-1}$ nazivamo cifrom najveće težine u posmatranoj osnovi *r*. Skup vrednosti svake od cifara u brojnom sistemu *r* je:

$$d \in \{0,\ 1,\ 2, \dots, r-1\} \qquad (1.1.1.1)$$

Neki od najčešće korišćenih brojnih sistema su:

a) decimalni ( r = 10)
b) heksadecimalni (r = 16)
c) binarni (r = 2)
d) oktalni (r = 8)

Prebacivanje brojeva iz jednog u drugi brojni sistem podrazumeva set jasno definisanih koraka koje ćemo predstaviti u nastavku.

### 1.1.1. Prelazak iz brojnog sistema sa osnovom *r* u brojni sistem sa osnovom *p*

Opšta definicija težinskog brojnog sistema je data sledećom formulom:

$$(d_{n-1}d_{n-2} \dots d_1 d_0 . d_{-1}d_{-2} \dots d_{-k+1}d_{-k})_r = \sum_{i=-k}^{n-1} d_i r^i \qquad (1.1.1.2)$$

U opštem slučaju, za broj D predstavljen u dva brojna sistema sa osnovom *r* i *p* važi:

$$\sum_{i=-k}^{n-1} d_i r^i = \sum_{i=-K}^{N-1} d_i p^i \qquad (1.1.1.3)$$

Ukoliko su poznate cifre broja u brojnom sistemu sa osnovom *r*, cifre broja u brojnom sistemu sa osnovom *p* dobijamo razvojem sume sa leve strane jednačine (1.1.1.3) i izvođenjem operacija sabiranja i stepenovanja u brojnom sistemu sa osnovom *p*. Zbog toga što je operacije sabiranja i stepenovanja najlakše izvesti u brojnom sistemu sa osnovom 10, formula (1.1.1.3) se može iskoristiti za transformaciju broja iz brojnog sistema sa osnovom *r* u dekadni brojni sistem i to na sledeći način:

$$\sum_{i=-k}^{n-1} d_i r^i = (d_{-k}r^{-k} + d_{-k+1}r^{-k+1} + \cdots + d_{n-2}r^{n-2} + d_{n-1}r^{n-1})_{10} \qquad (1.1.1.4)$$

Zbog toga što je u opštem slučaju najlakše realizovati operacije sabiranja i stepenovanja u brojnom sistemu sa osnovom deset, postupak prebacivanja broja iz brojnog sistema sa osnovom *r* u brojni sistem sa osnovom *p* obično podrazumeva dva koraka:

1) prebacivanje broja iz brojnog sistema osnove *r* u brojni sistem osnove 10
2) prebacivanje broja iz brojnog sistema osnove 10 u brojni sistem osnove *p*

### 1.1.2. Prelazak iz dekadnog brojnog sistema u brojni sistem sa osnovom r

Algoritam za prebacivanje brojeva iz osnove 10 u osnovu *r* se sastoji iz dva dela:

I. Prebacivanje celog dela broja
II. Prebacivanje razlomljenog dela broja

Do **algoritma za prebacivanje celog dela broja** možemo doći polazeći od jednačine (1.1.1.4). Ako ceo deo iz ove jednačine sredimo, i primenimo operacije sabiranja i množenja u dekadnom brojnom sistemu, dobijamo sledeću jednakost:

$$\begin{aligned}(d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1 d_0)_r &= \sum_{i=0}^{n-1} d_i r^i \\ &= d_0 + r(d_1 + r(d_2 + r(\ldots + r(d_{n-2} + r d_{n-1}))))\end{aligned} \qquad (1.1.1.5)$$

Na osnovu ove relacije možemo zaključiti da se algoritam za prebacivanje celog dela broja iz dekadnog brojnog sistema u brojni sistem osnove *r* sastoji od sledećih koraka:

1) ceo deo broja u osnovi 10 se podeli sa brojem *r* čime se dobija količnik $k_1$ i ostatak $o_1$
2) ukoliko je $k_1$ različito od 0, u sledećem koraku se $k_1$ deli sa *r*, čime se dobija količnik $k_2$ i ostatak $o_2$
3) postupak se nastavlja sve dok količnik $k_i$ ne bude jednak 0 kada će ostatak biti jednak $o_i$
4) cifre celog dela broja u osnovi *r* se dobijaju tako što se ostaci $o_i$ dobijeni deljenjem čitaju u obrnutom poretku u odnosu na redosled računanja ostataka, odnosno:

$$D_{10} = (o_i o_{i-1} \ldots o_1 o_0)_r \qquad (1.1.1.6)$$

Do algoritma za prebacivanje izlomljenog dela broja možemo doći na sličan način polazeći od jednačine (1.1.4).

$$\begin{aligned}(d_{-1}d_{-2}\ldots d_{-k+1}d_k)_r &= \sum_{i=-k}^{-1} d_i r^i \\ &= r^{-1}(d_{-1} + r^{-1}(d_{-2} + r^{-1}(\ldots + r^{-1}(d_{-k+1} \\ &\quad + r^{-1}d_{-k}))))\end{aligned} \qquad (1.1.1.7)$$

Na osnovu ove relacije možemo zaključiti da se algoritam za prebacivanje izlomljenog dela broja iz dekadnog brojnog sistema u brojni sistem osnove $r$ sastoji od sledećih koraka:

1) razlomljeni deo broja u osnovi 10 se pomnoži sa brojem $r$ čime se dobija proizvod $p_1$ gde $s_1$ predstavlja ceo deo broja $p_1$ a $f_1$ predstavlja razlomljeni deo broja $p_1$
2) ukoliko je $f_1$ različit od 0, u sledećem koraku se $f_1$ množi sa $r$, čime se dobija proizvod $p_1$ gde $s_2$ predstavlja ceo deo broja $p_2$ a $f_2$ predstavlja razlomljeni deo broja $p_2$
3) postupak se nastavlja sve dok razlomljeni deo $f_j$ proizvoda $p_j$ ne bude jednak 0 kada će $s_j$ biti ceo deo proizvoda $p_j$
4) cifre razlomljenog dela broja u osnovi $r$ se dobijaju tako što se celi delovi proizvoda $s_j$ čitaju u poretku u kom su i dobijeni, odnosno:

$$0.D_{10} = (s_1 s_2 \dots s_{j-1} s_j)_r \qquad (1.1.1.8)$$

Nakon određivanja cifara celog i izlomljenog dela, predstava dekadnog broja D u osnovi $r$ se dobija njihovim sabiranjem, odnosno:

$$D_{10} = o_i o_{i-1} \dots o_1 o_0 . s_1 s_2 \dots s_{j-1} s_{j_r} \qquad (1.1.1.9)$$

### 1.1.3. Prelazak iz brojnog sistema čija je osnova stepen broja dva u brojni sistem čija je osnova stepen broja 2

Algoritam za prebacivanje brojeva iz osnova koje su stepen broja 2 u brojni sistem čija je osnova takođe stepen broja 2, tj. $A_{2^{r_1}} \to B_{r^2}$, se sastoji od sledećih koraka:

1) broj A se prebaci u binarni zapis tako što se svaka cifra broja A prevodi u $r_1$ binarnih cifara
2) u odnosu na decimalnu tačku se grupišu binarne cifre u grupe od po $r_2$ cifara
3) binarne cifre u grupi od po $r_2$ cifara se prevode u odgovarajuće cifre u osnovi $r_2$

## 1.2. Predstave brojeva u digitalnim sistemima

U slučaju da digitalni sistem implementira funkcionalnosti koje su u vezi sa znakom broja D, pored informacije o tome u okviru kog brojnog sistema $r$ je predstavljen broj D neophodno je i naznačiti koji pristup digitalni sistem koristi za interpretaciju znaka broja D. Za predstavu označenih brojeva u okviru digitalnih sistema, na predmetu Digitalna Elektronika 1, razmatraćemo sledeće predstave označenih brojeva:

1) znak i apsolutna vrednost
2) komplement maksimalne vrednosti
3) komplement osnove
4) sa ofsetom

### 1.2.1. Znak i apsolutna vrednost

U slučaju da digitalni sistem koristi ovaj način za predstavu označenih brojeva, bit najveće težine predstavlja znak dok preostali biti predstavljaju apsolutnu vrednost broja. Dakle, posmatrani broj **D**, koji je predstavljen na *n* bita ($D_{n-1}D_{n-2}\ldots D_1D_0$), se interpretira kao pozitivan ukoliko bit najveće težine $D_{n-1}$ ima vrednost 0 dok se u suprotnom broj D interpretira kao negativan. Preostalih *n-1* bita se koriste za predstavu apsolutne vrednosti broja D. Dakle, skup vrednosti koje je moguće predstaviti ukoliko digitalni sistem koristi predstavu „Znak i apsolutna vrednost" je:

$$D \in \{+(2^{n-1} - 1), \ldots, +(2^{n-1} - 1)\} \qquad (1.2.1.1)$$

Jedna od mana ovog načina interpretacije označenih brojeva je nepostojanje jednoznačnosti u slučaju predstave broja 0

### 1.2.2. Komplement maksimalne vrednosti

Za brojni sistem sa osnovom *r* i datim brojem cifara *n*, predstava negativnog broja -D u komplementu maksimalne vrednosti se dobija na osnovu sledeće relacije:

$$-D \equiv M - D \qquad (1.2.2.1)$$

gde je M predstavlja maksimalnu vrednost broja koji je moguće predstaviti u datoj osnovi sa datim brojem cifara. Dakle, vrednost M je definisana sledećom relacijom

$$M = r^n - 1 \qquad (1.2.2.2)$$

Na osnovu relacija 1.2.2.1 i 1.2.2.2 jasno se može zaključiti zbog čega se ova predstava negativnih brojeva naziva komplement maksimalne vrednosti (zbog toga što se negativne predstave brojeva dobijaju oduzimajući apsolutnu vrednost negativnog broja od maksimalne vrednosti koja se dobija za dati broj cifara i datu osnovu).

Jednačina 1.2.2.1 se može tumačiti i na sledeći način: Ukoliko je negativna vrednost -D predstavljena na nivou cifara jednaka $-d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1d_0$ i ako je maksimalna vrednost M predstavljena na novu cifara jednaka mm…mm tada za cifre negativnog broja D važi:

$$\overline{d_i} = m - d_i = r - 1 - d_i \qquad (1.2.2.3)$$

Dakle, na osnovu 1.2.2.3 zaključujemo da se u slučaju predstave negativnog broja D u komplementu maksimalne vrednosti vrednost svake cifre predstave broja dobija oduzimanjem odgovarajuće cifre negativnog broja od maksimalne cifre koju je moguće prikazati u datoj osnovi.

Skup vrednosti brojeva koje je moguće zapisati, ukoliko je na raspolaganju *n* cifara u osnovi *r*, definisan je sledećom relacijom:

$$D \in \{-\left(\frac{r^n}{2} - 1\right), \ldots, +\left(\frac{r^n}{2} - 1\right)\} \qquad (1.2.2.4)$$

Kao i u slučaju predstave negativnog broja pod nazivom „Znak i apsolutna vrednost“ i u slučaju predstave pod nazivom „Komplement maksimalne vrednosti“ ne postoji jednoznačna predstava broja 0.

U slučaju binarnog brojnog sistema (r = 2) ova predstava se naziva **komplement jedinice** ili **prvi komplement**. Tada, na osnovu relacije 1.2.2.3, možemo izvesti zaključak da se biti predstave negativnog broja D, u komplementu maksimalne vrednosti, dobijaju komplementiranjem bita $d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1d_0$ negativnog broja D, odnosno:

$$\overline{d_{n-1}}\,\overline{d_{n-2}}\ldots\overline{d_1}\,\overline{d_0} = 111\ldots11 - d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1d_0 \qquad (1.2.2.5)$$

### 1.2.3. Komplement osnove

Za brojni sistem sa osnovom *r* i datim brojem cifara *n*, predstava negativnog broja -D u komplementu osnove se dobija na osnovu sledeće relacije:

$$-D \equiv M - D + 1 \qquad (1.2.3.1)$$

gde je M predstavlja maksimalnu vrednost broja koji je moguće predstaviti u datoj osnovi sa sa datim brojem cifara i definisana je relacijom 1.2.2.2. Dakle, na osnovu 1.2.3.1, predstavu negativnog broja -D na osnovu predstave u komplementu maksimalne vrednosti moguće je izraziti na sledeći način:

$$-D \equiv -D_{KMV} + 1 \qquad (1.2.3.2)$$

Jednačina 1.3.2.1 se može tumačiti i na sledeći način: Ukoliko je negativna vrednost -D predstavljena na nivou cifara jednaka $-d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1d_0$ i ako je maksimalna vrednost M predstavljena na novu cifara jednaka mm…mm tada za cifre negativnog broja D važi:

$$\overline{d_i} \equiv m - d_i + 1 = r - d_i \qquad (1.2.3.3)$$

Skup brojeva koje je moguće zapisati i komplementu osnove, ukoliko je na raspolaganju *n* cifara u osnovi *r*, definisan je sledećom relacijom:

$$D \in \{-\frac{r^n}{2}, \ldots, +\left(\frac{r^n}{2} - 1\right)\} \qquad (1.2.3.4)$$

Za razliku od prethodne dve predstave negativnih brojeva, u slučaju predstave u komplementu osnove, za predstavu broja 0 postoji jednoznačna vrednost, tj. 0 = 0000.

U slučaju binarnog brojnog sistema (r = 2) ova predstava se naziva **komplement dvojke** ili **drugi komplement**. Tada, na osnovu relacije 2.2.2.3, možemo izvesti zaključak da se biti predstave negativnog broja D, u komplementu osnove, dobijaju komplementiranjem bita $d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1d_0$ negativnog broja D sa dodatkom 1, odnosno:

$$\overline{d_{n-1}}\,\overline{d_{n-2}}\ldots\overline{d_1}\,\overline{d_0} + 1 \equiv 111\ldots11 - d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1d_0 + 1 \qquad (1.2.3.5)$$

# 2. Zadaci sa časova vežbi

## Zadatak 2.1.

a) Prebaciti u dekadni brojni sistem sledeće brojeve:

$1001.0101_2$, $137.21_8$, $1E0.2A_{16}$, $254.61_7$

b) Prebaciti u binarni brojni sistem sledeće brojeve:

$13.375_{10}$, $614.24_8$, $A3B.4F_{16}$, $254.61_7$

---

**Rešenje:**

a) Na osnovu algoritma opisanog u 1.1.1 važi:

$$\begin{aligned}1001.0101_2 &= \mathbf{1}\cdot 2^3 + \mathbf{0}\cdot 2^2 + \mathbf{0}\cdot 2^1 + \mathbf{1}\cdot 2^0 + \mathbf{0}\cdot 2^{-1} + \mathbf{1}\cdot 2^{-2} + \mathbf{0}\cdot 2^{-3}\\ &+ 1\cdot 2^{-4} = 9.3125_{10}\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

$$137.21_8 = \mathbf{1}\cdot 8^2 + \mathbf{3}\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 + 2\cdot 8^{-1} + \mathbf{1}\cdot 8^{-2} = 95.265625_{10} \tag{2.1.2}$$

$$\begin{aligned}1E0.2A_{16} &= \mathbf{1}\cdot 16^2 + \mathbf{14}\cdot 16^1 + \mathbf{0}\cdot 16^0 + \mathbf{2}\cdot 16^{-1} + \mathbf{10}\cdot 16^{-2}\\ &= 480.16406_{10}\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

$$254.61_7 = \mathbf{2}\cdot 7^2 + 5\cdot 7^1 + \mathbf{4}\cdot 7^0 + \ \mathbf{6}\cdot 7^{-1} + \mathbf{1}\cdot 7^{-2} = 137.8776_{10} \tag{2.1.4}$$

b) Broj $13.375_{10}$ je moguće konvertovati iz decimalnog u binarni brojni sistem na osnovu algoritma opisanog u 0. Na osnovu tog algoritma najpre je neophodno izvršiti konverziju celog dela broja a zatim razlomljenog i na kraju sabrati dobijene rezultate. Proces konvertovanja celog dela je:

| $i$ | $k_{i-1}$ | $r$ | $k_i$ | $o_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 13: | 2 | 6 | 1 |
| 2 | 6: | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3: | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 1: | 2 | 0 | 1 |

Na osnovu prikazane procedure dobijamo da je ceo deo broja u binarnom brojnom sistemu jednak 1101. Proces određivanja ralomljenog dela:

| $i$ | $f_{i-1}$ | $r$ | $f_i$ | $s_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.375· | 2 | 0.75 | 0 |
| 2 | 0.75· | 2 | 0.5 | 1 |

3 0.5· 2 0 1

Na osnovu prikazane procedure dobijamo da je razlomljeni deo broja u binarnom brojnom sistemu jednak 111.

Na osnovu prikazanog postupka i dobijenih rezultata dobijamo da je ekvivalentna predstava broja $13.375_{10}$ u binarnom brojnom sistemu jednaka 1101.111

Predstavu broja $614.24_8$ u binarnom brojnom sistemu dobićemo primenom algoritma opisanog u 1.1.3. Dakle, ova konverzija podrazumeva prebacivanje broja iz brojnog sistema čija je osnova stepen broja dva u brojni sistem čija je osnova takođe stepen broja 2. Ukoliko primenimo korake pomenutog algoritma dobijamo:

1) broj $614.24_8$ prebacujemo u binarni zapis tako što svaku cifru prevodimo u trobitni zapis ($2^3 = 8$):

$$614.24_8 = 110\;001\;100\;.010\;100 \tag{2.1.5}$$

2) drugi korak algoritma se ne implementira je je u pitanju nulti stepen broja 2. To znači da (2.3.5) predstavlja predstavu broja $614.24_8$ u binarnom brojnom sistemu

Na sličan način, kao za broj $614.24_8$, određujemo binarnu predstavu broja $A3B.4F_{16}$

$$\mathrm{A3B.4F_8} = 1010\;0011\;1011\;.0100\;1111 \tag{2.1.6}$$

U slučaju $254.61_7$, pošto osnova nije stepen broja 2, najlakši put za prebacivanje iz brojnog sistema sa osnovom 7 u brojni sistem sa osnovom 2 odrazumeva prebaivanje u brojni sistem sa osnovom 10 a zatim u brojni sistem sa osnovom 2, odnosno:

$$254.61_7 = 137.8776_{10} = 10001001.1110000 \tag{2.1.7}$$

## Zadatak 2.2.

a) Odrediti osnovu brojnog sistema u kome je data jednačina:

$$3x^2 - 51x + 144 = 0 \tag{2.2.1}$$

i jedno njeno rešenje $x$ =12

---

**Rešenje:**

a) Pošto nije poznata osnova u kojoj je zadata jednačina, potrebno je sve brojeve koji se javljaju u jednačini prebaciti u osnovu deset na osnovu 1.1.1. Primenjujući opisani postupak dobija se:

$$3x^2 - (5r + 1)x + (r^2 + 4r + 4) = 0 \tag{2.2.2}$$

Ukoliko u ovu jednačinu zamenimo poznato rešenje x=12=r+2 dobijamo:

$$3(r+2)^2-(5r+1)(r+2)+(r+2)^2=0 \tag{2.2.3}$$

odnosno

$$(7-r)(r+2)=0 \tag{2.2.4}$$

Gde su rešenja jednačine $r_1$ = -2 i $r_2$ = 7. Pošto osnova ne može biti negativna, dobija se da je osnova sistema u kojem je zadata jednačina $r$=7

## Zadatak 2.3.

a) Odrediti skup decimalnih vrednosti brojeva koje je moguće predstaviti u kodu znak i apsolutna vrednost broja ako je na raspolaganju 7 bita za predstavljanje binarnih brojeva.

b) Predstaviti sledeće decimalne brojeve koristeći predstavu znak i apsolutna vrednost ukoliko je na raspolaganju 7 bita:

11, -5, -9, 0, 31, -29, 74

c) Odrediti decimalnu vrednost binarnih brojeva datih u predstavi znak i apsolutna vrednost:

101110, 010100, 1000000, 0000000, 1000001

---

**Rešenje:**

a) Na osnovu 1.2.1.1. važi da je skup brojeva koje je moguće predstaviti, koristeći predstavu znak i apsolutna vrednost, jednak:

$$\{-(2^{7-1}-1),+(2^{7-1}-1)\} \tag{2.3.1}$$

$$\{-63,-62,\ldots,62,63\} \tag{2.3.2}$$

b) Predstavljanje brojeva koristeći predstavu znak i apsolutnu vrednost se izvodi u tri koraka:

1) Provera da li je broj moguće predstaviti zadatim brojem bita. Ukoliko jeste, prelazi se na korak 2)
2) Na osnovu toga da li je broj pozitivan ili negativan, postavlja se odgovarajuća vrednost bita najveće težine
3) Ostali biti se dobijaju jednostavnim prebacivanjem apsolutne vrednosti u binarni sistem

Dakle, korak 1) je odrađen u tačaki a) i (2.3.2) definiše skup brojeva koje je moguće predstaviti na 7 bita koristeći predstavu znak i apsolutna vrednost. Primenom koraka 2) i 3) dobijamo:

$$11 = 0001011 \tag{2.3.3}$$
$$-5 = 1000101 \tag{2.3.4}$$
$$-9 = 1001001 \tag{2.3.5}$$
$$0 = 0000000 \tag{2.3.6}$$
$$31 = 0011111 \tag{2.3.7}$$

$$-29 = 1011101 \quad (2.3.8)$$

74 – Nije moguće predstaviti (2.3.9)

c) Algoritam prebacivanje brojeva predstavljenih koristeći predstavu znak i apsolutna vrednost u osnovu 10 uključuje sledeće korake:

$$1001110 = -14 \quad (2.3.10)$$
$$0010100 = 20 \quad (2.3.11)$$
$$1000000 = 0 \quad (2.3.12)$$
$$0000000 = 0 \quad (2.3.13)$$
$$1000001 = -1 \quad (2.3.14)$$

## Zadatak 2.4.

a) Za neoznačene brojeve date u decimalnom brojnom sistemu predstaviti brojeve iste apsolutne vrednosti ali suprotnog znaka u komplementu maksimalne vrednosti sa ukupno četiri cifre: 1952, 4399, 34, 0, 1

b) Za neoznačene brojeve date u heksadecimalnom brojnom sistemu predstaviti brojeve iste apsolutne vrednosti ali suprotnog znaka u komplementu maksimalne vrednosti sa ukupno četiri cifre: B2A4, F24, 1E, 0, 1

c) Za neoznačene brojeve date u oktalnom brojnom sistemu predstaviti brojeve iste apsolutne vrednosti ali suprotnog znaka u komplementu maksimalne vrednosti sa ukupno četiri cifre: 24.70, 7377, 42, 0, 1

d) Za neoznačene brojeve date u binarnom brojnom sistemu predstaviti brojeve iste apsolutne vrednosti ali suprotnog znaka u komplementu maksimalne vrednosti sa ukupno četiri cifre: 1011, 0101, 11, 0, 1

---

**Rešenje:**

Algoritam za predstavljanje brojeva u komplementu maksimalne vrednosti uključuje sledeće korake:

1) Provera da li se zadati broj nalazi u skupu brojeva koje je moguće predstaviti na datom broju cifara *n* – koristimo (1.2.2.4). Ukoliko je broj moguće predstaviti koristeći *n* cifara u posmatranom brojnom sistemu, prelazimo na korak 2
2) Koristimo formulu (1.2.2.1) da bi dobili predstavunegativnog broja

Primenom navedenih koraka dobijamo:

a) Skup decimalnih vrednosti (r=10) koje je moguće predstaviti u komplementu maksimalne vrednosti, ukoliko na raspolaganju imamo 4 cifre (n =4 ), je:

$$\{-\left(\frac{10^4}{2} - 1\right), +\left(\frac{10^4}{2} - 1\right)\} \quad (2.4.1)$$

$$\{-4999, -4998, \dots, 4998, 4999\} \quad (2.4.2)$$

Odgovarajuće predstave vrednosti u komplementu maksimalne vrednosti su:

$$-1952 \equiv 9999 - 1952 = 8047_{KMV} \quad (2.4.3)$$
$$-4399 \equiv 9999 - 4399 = 5600_{KMV} \quad (2.4.4)$$
$$-34 \equiv 9999 - 34 = 9965_{KMV} \quad (2.4.5)$$

$$0 \equiv 9999 - 0 = 9999_{KMV} \quad (2.4.6)$$
$$1 \equiv 9999 - 1 = 9998_{KMV} \quad (2.4.7)$$

b) Skup heksadecimalnih vrednosti (r=16) koje je moguće predstaviti u komplementu maksimalne vrednosti, ukoliko na raspolaganju imamo 4 cifre (n =4 ), je:

$$\{-\left(\frac{16^4}{2} - 1\right), \ldots, +\left(\frac{16^4}{2} - 1\right)\} \quad (2.4.8)$$
$$\{-32767, \ldots, 32767\} \quad (2.4.9)$$
$$\{-7FFF_{16}, \ldots, 7FFF_{16}\} \quad (2.4.10)$$

Odgovarajuće predstave vrednosti u komplementu maksimalne vrednosti su:

$$-B2A4 \text{ – izlazi iz skupa i nije moguće predstaviti} \quad (2.4.11)$$
$$-F24 \equiv FFFF - F24 = F0DB_{KMV} \quad (2.4.12)$$
$$-1E \equiv FFFF - 1E = FFE1_{KMV} \quad (2.4.13)$$
$$0 \equiv FFFF - 0 = FFFF_{KMV} \quad (2.4.14)$$
$$1 \equiv FFFF - 1 = FFFE_{KMV} \quad (2.4.15)$$

c) Skup oktalnih vrednosti (r = 8) koje je moguće predstaviti u komplementu maksimalne vrednosti, ukoliko na raspolaganju imamo 4 cifre (n =4 ), je:

$$\{-\left(\frac{8^4}{2} - 1\right), \ldots, +\left(\frac{8^4}{2} - 1\right)\} \quad (2.4.16)$$
$$\{-2047, \ldots, 2047\} \quad (2.4.17)$$
$$\{-3777_8, \ldots, 3777_8\} \quad (2.4.18)$$

Odgovarajuće predstave vrednosti u komplementu maksimalne vrednosti su:

$$-27.40 \equiv 77.77 - 27.40 = 50.37_{KMV} \quad (2.4.19)$$
$$-7377 \text{ - Izlazi iz skupa} \quad (2.4.20)$$
$$-42 \equiv 7777 - 42 = 7735_{KMV} \quad (2.4.21)$$
$$0 \equiv 7777 - 0 = 7777_{KMV} \quad (2.4.22)$$
$$1 \equiv 7777 - 1 = 7776_{KMV} \quad (2.4.23)$$

d) Skup binarnih vrednosti (r = 2) koje je moguće predstaviti u komplementu maksimalne vrednosti, ukoliko na raspolaganju imamo 4 cifre (n =4 ), je:

$$\{-\left(\frac{2^4}{2} - 1\right), \ldots, +\left(\frac{2^4}{2} - 1\right)\} \quad (2.4.24)$$
$$\{-7, \ldots, 7\} \quad (2.4.25)$$
$$\{-0111_2, \ldots, 0111_2\} \quad (2.4.26)$$

Odgovarajuće predstave vrednosti u komplementu maksimalne vrednosti su:

$$-1011 \text{ - Izlazi iz skupa} \quad (2.4.27)$$
$$-0101 \equiv 1111 - 0101 = 1010_{KMV} \quad (2.4.28)$$
$$11 \equiv 1111 - 11 = 1100_{KMV} \quad (2.4.29)$$
$$0 \equiv 1111 - 0 = 1111_{KMV} \quad (2.4.30)$$

$$1 \equiv 1111 - 1 = 1110_{KMV} \quad (2.4.31)$$

Potrebno je primetiti da se u slučaju binarnih vrednosti predstava u komplementu maksimalne vrednosti dobija komplementiranjem bita.

## Zadatak 2.5.

e) Za neoznačene brojeve date u decimalnom brojnom sistemu predstaviti brojeve iste apsolutne vrednosti ali suprotnog znaka u komplementu osnove sa ukupno četiri cifre: 1952, 4399, 34, 0, 1

f) Za neoznačene brojeve date u heksadecimalnom brojnom sistemu predstaviti brojeve iste apsolutne vrednosti ali suprotnog znaka u komplementu osnove sa ukupno četiri cifre: B2A4, F24, 1E, 0, 1

g) Za neoznačene brojeve date u oktalnom brojnom sistemu predstaviti brojeve iste apsolutne vrednosti ali suprotnog znaka u komplementu osnove sa ukupno četiri cifre: 24.70, 7377, 42, 0, 1

h) Za neoznačene brojeve date u binarnom brojnom sistemu predstaviti brojeve iste apsolutne vrednosti ali suprotnog znaka u komplementu osnove sa ukupno četiri cifre: 1011, 0101, 11, 0, 1

---

**Rešenje:**

Algoritam za predstavljanje brojeva u komplementu osnove uključuje sledeće korake:

1) Provera da li se zadati broj nalazi u skupu brojeva koje je moguće predstaviti na datom broju cifara *n* – koristimo (1.3.2.4). Ukoliko je broj moguće predstaviti koristeći *n* cifara u posmatranom brojnom sistemu, prelazimo na korak 2
2) Koristimo formulu (1.3.2.1) da bi dobili predstavu negativnog broja

Primenom navedenih koraka dobijamo:

e) Skup decimalnih vrednosti (r=10) koje je moguće predstaviti u komplementu osnove, ukoliko na raspolaganju imamo 4 cifre (n =4 ), je:

$$\{-\frac{10^4}{2}, \dots, +\left(\frac{10^4}{2} - 1\right)\} \quad (2.5.1)$$

$$\{-5000, -4999, \dots, 4998, 4999\} \quad (2.5.2)$$

Odgovarajuće predstave vrednosti u komplementu osnove su:

$$-1952 \equiv 10000 - 1952 = 8049_{KO} = 8047_{KMV} + 1 \quad (2.5.3)$$

$$-4399 \equiv 10000 - 4399 = 5601_{KO} = 5600_{KMV} + 1 \quad (2.5.4)$$

$$-34 \equiv 10000 - 34 = 9966_{KO} = 9965_{KMV} + 1 \quad (2.5.5)$$

$$0 \equiv 10000 - 0 = 0000_{KO} = 9999_{KMV} + 1 \quad (2.5.6)$$

$$1 \equiv 10000 - 1 = 9999_{KMV} = 9998_{KMV} + 1 \quad (2.5.7)$$

f) Skup heksadecimalnih vrednosti (r=16) koje je moguće predstaviti u komplementu osnove, ukoliko na raspolaganju imamo 4 cifre (n =4 ), je:

$$\{-\frac{16^4}{2}, \dots, +\left(\frac{16^4}{2}-1\right)\} \tag{2.5.8}$$
$$\{-32768, -32767, \dots, 32766\ ,32767\ \} \tag{2.5.9}$$
$$\{-8FFF_{16}, 7FFF_{16}\ \ \dots, 7FFE_{16}, 7FFF_{16}\ \} \tag{2.5.10}$$

Odgovarajuće predstave vrednosti u komplementu osnove su:

$$-B2A4 \text{ – izlazi iz skupa i nije moguće predstaviti} \tag{2.5.11}$$
$$-F24 \equiv 10000 - F24 = F0DC_{KO} = F0DB_{KMV} + 1 \tag{2.5.12}$$
$$-1E \equiv 10000 - 1E = FFE2_{KO} = FFE1_{KMV} + 1 \tag{2.5.13}$$
$$0 \equiv 10000 - 0 = 0000_{KO} = FFFF_{KMV} + 1 \tag{2.5.14}$$
$$1 \equiv 10000 - 1 = FFFF_{KO} = FFFE_{KMV} + 1 \tag{2.5.15}$$

g) Skup oktalnih vrednosti (r = 8) koje je moguće predstaviti u komplementu osnove, ukoliko na raspolaganju imamo 4 cifre (n =4 ), je:

$$\{-\frac{8^4}{2}, \dots, +\left(\frac{8^4}{2}-1\right)\} \tag{2.5.16}$$
$$\{-2048, -2047, \dots, 2046, 2047\ ] \tag{2.5.17}$$
$$\{-4000_8, -3777_8, \dots, 3776_8, 3777_8\ \} \tag{2.5.18}$$

Odgovarajuće predstave vrednosti u komplementu osnove su:

$$-27.40 \equiv 100.00\ - 27.40 = 50.40_{KO} = 50.37_{KMV} + 1 \tag{2.5.19}$$
$$-7377 \text{ - Izlazi iz skupa} \tag{2.5.20}$$
$$-42 \equiv 10000 - 42 = 7736_{KO} = 7735_{KMV} + 1 \tag{2.5.21}$$
$$0\ \equiv 10000 - 0 = 0000_{KO} = 7777_{KMV} + 1 \tag{2.5.22}$$
$$1 \equiv 10000 - 1 = 7777_{KO} = 7776_{KMV} + 1 \tag{2.5.23}$$

h) Skup binarnih vrednosti (r = 2) koje je moguće predstaviti u komplementu osnove (drugom komplementu), ukoliko na raspolaganju imamo 4 cifre (n =4 ), je:

$$\{-\frac{2^4}{2}, \dots, +\left(\frac{2^4}{2}-1\right)\} \tag{2.5.24}$$
$$\{-8, -7, \dots, 6, 7\ \} \tag{2.5.25}$$
$$\{-1000_2, -0111_2, \dots, 0110_2, 0111_2\ \} \tag{2.5.26}$$

Odgovarajuće predstave vrednosti u komplementu osnove (drugom komplementu) su:

$$-1011 \text{ - Izlazi iz skupa} \tag{2.5.27}$$
$$-0101 \equiv 1000 - 0101 = 1011_{KO} = 1010_{KMV} + 1 \tag{2.5.28}$$
$$11\ \equiv 1111 - 11 = 1101_{KO} = 1100_{KMV} + 1 \tag{2.5.29}$$
$$0 \equiv 1111 - 0 = 0000_{KO} = 1111_{KMV} + 1 \tag{2.5.30}$$
$$1 \equiv 1111 - 1 = 1111_{KO} = 1110_{KMV} + 1 \tag{2.5.31}$$

Potrebno je primetiti da se u slučaju binarnih vrednosti predstava u komplementu osnove dobija komplementiranjem bita negativnog broja i dodavanjem vrednosti 1.

## Zadatak 2.6.

a) Predstaviti sledeće označene brojeve u komplementu osnove sa 4 cifre:

$-45_{10}$, $14_8$, $1010_2$, $01_2$, $10_2$

b) Predstaviti sledeće označene brojeve u komplementu maksimalne vrednosti sa 4 cifre:

$-54_{10}$, $36_8$, $1010_2$, $01_2$, $10_2$

---

**Rešenje:**

U zavisnosti od toga da li ispred broja stoji znak „+“ ili „-“, predstava označenih brojeva u istoj osnovi se određuje na jedan od sledećih načina

1) Ako ispred broja **stoji znak „-“** potrebno je napisati njegovu suprotnu vrednost. Ukoliko broj ima manje od traženog broja cifara, neophodno je izvršiti ekstenziju znaka pre određivanja suprotne vrednosti. Prilikom ekstenzije, ukoliko se broj tumači kao pozitivan, dodaje se potreban broj nula, dok ukoliko se broj tumači kao negativan dodaje se potreban broj najvećih cifara koje je moguće zapisati u datoj osnovi (m = r - 1). Broj se tumači kao pozitivan ako je cifra najveće težine iz skupa vrednosti:

$$\{0, 1, \dots, \frac{r}{2} - 1\} \qquad (2.6.1)$$

a kao negativan ako je cifra nejveće težine iz skupa:

$$\{\frac{r}{2}, \frac{r}{2} + 1, \dots, r - 1\} \qquad (2.6.2)$$

Ako je osnova neparan broj, prilikom određivanja da li se broj tumači kao pozitivan ili negativan, potrebno je uzeti u obzir i ostale cifre

2) Ako ispred broja **ne stoji znak „-“, a broj ima manje od traženog broja cifara**, potrebno je samo izvršiti ekstenziju znaka

3) Ako ispred broja **ne stoji znak „-“, a broj ima tačan broj traženih cifara**, broj ostaje ne promenjen

a) Na osnovu prethodno objašnjenog postupka za određivanje predstave označenih brojeva dobijamo:

**$-45_{10}$**: pošto broja sadrži znak „-“ potrebno je odrediti njegovu suprotnu vrednost. Broj sadrži dve cifre dok su za predstavu suprotne vrednosti na raspolaganju četiri cifre. Dakle, pre određivanja suprotne vrednosti neophodno je izvršiti ekstenziju znaka. Pošto je broj predstavljen u osnovi 10, a cifra najveće težine je jednaka 4, jasno je da se deo broja iza znaka „-„ tumači kao pozitivan jer pripada skupu definisanom sa 2.6.1. Dakle, ekstenziju znaka treba realizovati dodavanjem dve vodeće nule između znaka „-“ i 45. Nakon toga, koristeći već dobro poznati algoritam za predstavu brojeva u komplementu osnove (sekcija 1.2.3) dobijamo:

$$-45_{10} \equiv 10000 - 0045 = 9955_{10-KO} \qquad (2.6.3)$$

**$14_8$**: broj ne sadrži znak „-“ i broj cifara je manji od traženog što znači da je za predstavu broja u komplementu osnove potrebno uraditi samo ekstenziju znaka. Cifra najveće težine pripada skupu definisanom sa (2.6.1) što znači da se ekstenzija znaka realizuje dodavanjem dve vodeće nule:

$$14_8 \equiv 0014_{8-KO} \qquad (2.6.4)$$

**1010$_2$**: broj je već napisan sa odgovarajuim brojem cifara što znači da ostaje ne promenjen

**01$_2$**: broj ne sadrži znak „-“ i broj cifara je manji od traženog. Dakle, za predstavu broja neophodno je izvršiti samo ekstenziju znaka. Cifra najveće težine pripada ospegu definisanom sa (2.6.1) što znači da se ekstenzija znaka realizuje dodavanjem dve vodeće nule:

$$01_2 \equiv 0001_{2-KO} \qquad (2.6.5)$$

**10$_2$**: broj ne sadrži znak „-“ i broj cifara je manji od traženog. Dakle, za predstavu broja neophodno je izvršiti samo ekstenziju znaka. Cifra najveće težine pripada ospegu definisanom sa (2.6.2) što znači da se ekstenzija znaka realizuje dodavanjem dve najveće cifre koje je moguće predstaviti u brojnom sistemu sa osnovom 2, a to su dve cifre 1:

$$10_2 \equiv 1110_{2-KO} \qquad (2.6.6)$$

b) Na osnovu prethodno objašnjenog postupka za određivanje predstave označenih brojeva dobijamo:

**-54$_{10}$**: pošto broj sadrži znak „-“ potrebno je odrediti njegovu suprotnu vrednost. Broj sadrži dve cifre dok su za predstavu suprotne vrednosti na raspolaganju četiri cifre. Dakle, pre određivanja suprotne vrednosti neophodno je izvršiti ekstenziju znaka. Pošto je broj predstavljen u osnovi 10, a cifra najveće težine je jednaka 5, jasno je da se deo broja iza znaka „-„ tumači kao negativan jer pripada skupu definisanom sa 2.6.2. Dakle, ekstenziju znaka treba realizovati dodavanjem dve maksimalne cifre koje je moguće predstaviti u osnovi 10, a to su cifre 9. Dakle, predstava broja u komplementu maksimalne vrednosti je:

$$-54_{10} \equiv 9999 - 9954 = 0045_{10-KMV} \qquad (2.6.7)$$

**36$_8$**: broj ne sadrži znak „-“ i broj cifara je manji od traženog što znači da je za predstavu broja u komplementu maksimalne osnove potrebno uraditi samo ekstenziju znaka. Cifra najveće težine pripada skupu definisanom sa (2.6.1) što znači da se ekstenzija znaka realizuje dodavanjem dve vodeće nule:

$$38_8 \equiv 0038_{8-KMV} \qquad (2.6.8)$$

**1010$_2$**: broj ne sadrži znak „-“ i broj cifara je jednak traženom broju što znači da broj ostaje ne promenjen

**01$_2$**: broj ne sadrži znak „-“ i broj cifara je manji od traženog. Dakle, za predstavu broja neophodno je izvršiti samo ekstenziju znaka. Cifra najveće težine pripada ospegu definisanom sa (2.6.1) što znači da se ekstenzija znaka realizuje dodavanjem dve vodeće nule:

$$01_2 \equiv 0001_{2-KMV} \qquad (2.6.9)$$

**$10_2$**: broj ne sadrži znak „-“ i broj cifara je manji od traženog. Dakle, za predstavu broja neophodno je izvršiti samo ekstenziju znaka. Cifra najveće težine pripada ospegu definisanom sa (2.6.2) što znači da se ekstenzija znaka realizuje dodavanjem dve najveće cifre koje je moguće predstaviti u brojnom sistemu sa osnovom 2, a to su dve cifre 1:

$$10_2 \equiv 1110_{2-KMV} \tag{2.6.10}$$

## Zadatak 2.7.

a) Predstaviti sledeće označene brojeve, date u decimalnom brojnom sistemu, u drugom komplementu sa 8 bita:

-18, -120, 0, 1, -128, 127, 128

d) Odrediti broj iste apsolutne vrednosti ali suprotnog znaka za sledeće binarne brojeve date u drugom komplementu sa 3 bita. Rezultate predstaviti u drugom koplementu sa 6 bita:

101, 011, 111, 001, 000

---

Rešenje:

**-18**: Pošto je broj dat u osnovi 10 a zahteva se predstava broja u osnovi 2, najpre je neophodno izvršiti konverziju broja, iza znaka „-“, iz jednog u drugi brojni sistem pri čemu se u binarnom brojnom sistem, deo broja iza znaka „-“ predstavlja na traženom broju bita. Dakle, predstava u binarnom brojnom sistemu, na traženom broju bita, je:

$$-18_{10} = -00010010_2 \tag{2.7.1}$$

Pošto se ispred broja nalazi znak “-”, neophodno je odrediti njegovu suprotnu brednost u binarnom brojnom sistemu

$$-00010010 \equiv 11111111 - 00010010 + 1 = 11101110 \tag{2.7.2}$$

**-120:**

$$-01111000 \equiv 11111111 - 01111000 + 1 = 10001000 \tag{2.7.3}$$

**0**:

$$0 \equiv 00000000 \tag{2.7.4}$$

**1**:

$$00000001 \equiv 00000000 \tag{2.7.5}$$

**-128:**

$$-01111111 \equiv 11111111 - 01111111 + 1 = 10000000 \tag{2.7.6}$$

**-127:**

$$-01111110 \equiv 11111111 - 01111110 + 1 = 011111111 \tag{2.7.8}$$

**-128:** Nije moguće prikazati jer izlazi iz skupa

b) Potrebno je prvo odraditi suprotnu vrednost datog broja na širini od 3 bita, a zatim u zavisnosti od cifre najveće težine, uraditi odgovarajuću ekstenziju znaka

$$-101 \equiv 111 - 101 + 1 = 011 = 000011 \tag{2.7.9}$$

$$-011 \equiv 111 - 011 + 1 = 101 = 111101 \tag{2.7.10}$$

$$-111 \equiv 111 - 111 + 1 = 001 = 000001 \tag{2.7.11}$$

$$-001 \equiv 111 - 001 + 1 = 111 = 111111 \tag{2.7.12}$$

# 3. Zadaci za samostalni rad

## Zadatak 3.1.

a) Prebaciti u oktalni brojni sistem sledeće brojeve:

$$73.75_{10}, 1001110.101101_{2}, 14.D8F_{16}$$

b) Prebaciti u heksadecimalni brojni sistem sledeće brojeve:

$$82.25_{10}, 1011010.11010111_{2}, 52.751_{8}$$

## Zadatak 3.2.

a) Odrediti rešenje jednačine:

$$202_{x} = 20_{50} \tag{3.2.1}$$

b) Data je jednačina

$$x^2 - 12x + 21 = 0 \tag{3.2.2}$$

i jedno njeno rešenje *x* = 3. U kom brojnom sistemu je data jednačina i njeno rešenje? Odrediti drugo rešenje jednačine.

c) Odrediti rešenje jednačine

$$10_2 + 21_3 + 32_4 + 43_5 = x_6 \tag{3.2.3}$$